ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2010
École Supérieure des Industries du Textile et de l'Habillement
ESITH

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2010

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière PSI

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit.

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à p lignes et q colonnes ; si $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, ${}^tM$ désigne la matrice transposée de M et $\text{rg}\,(M)$ son rang.

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 et u un endomorphisme de E ; on note χ_u le polynôme caractéristique de u

La composée de deux endomorphismes f et g de E est notée fg au lieu de $f \circ g$.

Les trois parties du problème sont indépendantes.

1ère Partie

On suppose que le polynôme caractéristique χ_u de u possède une racine double notée λ et une racine simple notée μ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \neq \mu$: $\chi_u = (\lambda - X)^2(\mu - X)$; on note E_λ et E_μ les sous-espaces propres de u associés respectivement à λ et μ et on pose $v = (u - \lambda id_E)^2$ et $w = u - \mu id_E$.

1. (a) Exprimer v en fonction de u^2, u et id_E.
   (b) Si $x \in \text{Ker}\, w$, calculer $v(x)$ en fonction de x.
   (c) En déduire que $\text{Ker}\, v \cap \text{Ker}\, w = \{0\}$.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in E$, $v(x) \in \text{Ker}\, w$ et que $w(x) \in \text{Ker}\, v$.
   (b) Effectuer la division euclidienne du polynôme $(X - \lambda)^2$ par le polynôme $X - \mu$ puis montrer que $E = \text{Ker}\, v \oplus \text{Ker}\, w$.
   (c) Donner la dimension de $\text{Ker}\, w$ et en déduire celle de $\text{Ker}\, v$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la dimension du sous-espace vectoriel E_λ pour que u soit diagonalisable.
   Dans la suite de cette partie, on suppose l'endomorphisme u **n'est pas diagonalisable.**
4. Justifier que E_λ est un sous-espace vectoriel strict de $\text{Ker}\, v$.
5. On choisit un vecteur $e_2 \in \text{Ker}\, v \setminus E_\lambda$ et on pose $e_1 = (u - \lambda id_E)(e_2)$; soit enfin e_3 un vecteur non nul de $\text{Ker}\, w$.
   (a) Calculer $u(e_1)$ et montrer que la famille (e_1, e_2) est une base de $\text{Ker}\, v$.
   (b) Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de E et écrire la matrice de u dans cette base.
6. **Un exemple** : On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer le polynôme caractéristique de f.

(b) Déterminer les sous-espaces propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

(c) Calculer la matrice $(A - I_3)^2$ et donner une équation et la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}(f - id)^2$.

(d) On pose $e_2 = (1, -1, 0)$ et $e_1 = (f - \lambda id)(e_2)$.

i. Trouver un vecteur propre e_3 de f dont la deuxième composante est égale à 1 et justifier que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

ii. Écrire la matrice B de f dans cette base et exprimer A en fonction de B.

iii. Calculer B^n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on défini la matrice exponentielle de M comme étant la somme de la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} M^k$, d'éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $\exp(M) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k$.

(a) Justifier pourquoi la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} M^k$ converge dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) Calculer $\exp(B)$ puis $\exp(A)$ où A et B sont les matrices rencontrées dans l'exemple précédent.

2ème Partie

Ici on prend $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et u désigne l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On se donne $X_0 \in E$ avec $X_0 \neq 0$ et on définit la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E par

$$X_{n+1} = M X_n, \; n \in \mathbb{N}.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$ et on considère un vecteur $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E$ pour lequel on associe la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = {}^t X_n V, \; n \in \mathbb{N}.$$

1. Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

2. Montrer que si V est un vecteur propre de ${}^t M$ associé à la valeur propre λ alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique. Quelle est sa raison ?

3. **Application**

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que $(a_0, b_0, c_0) = (1, 0, 0)$ et pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n - 15b_n + 3c_n \\ b_{n+1} = a_n - 4b_n + c_n \\ c_{n+1} = 2a_n - 10b_n + 3c_n \end{cases}$$

(a) Préciser X_0 ainsi que la matrice M associée à ces suites.

(b) Déterminer les valeurs propres de la matrice ${}^t M$ et chercher les sous-espaces propres associés.

(c) En considérant deux vecteurs propres linéairement indépendant V_1 et V_2 de la matrice ${}^tM$ et en étudiant les suites $(v_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ qui leur sont respectivement associées, trouver les expression des termes d'indice n des trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

3ème Partie

Dans cette partie, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$; on rappelle que $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -10 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer que f n'admet qu'une seule valeur propre notée α.
   (b) Caractériser le sous-espace propre de f associé à la valeur propre α. Quelle est sa dimension ?
   (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
   (d) On pose $u_1 = e_1$, $u_2 = (f - \alpha\, id)(u_1)$ et $u_3 = 2e_1 + e_3$.
      i. Montrer que u_2 et u_3 sont des éléments de $\mathrm{Ker}\,(f - \alpha\, id)$.
      ii. Montrer que $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Écrire la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}_1$.
   (b) Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}_1$ et calculer P^{-1}.
   (c) Exprimer alors A à l'aide des matrices B, P et P^{-1}.
3. On pose $J = I + B$ où I est la matrice identité d'ordre 3.
   (a) Calculer J^2.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = (-1)^k(I - kJ)$.
   (c) En déduire l'expression de A^k pour tout entier naturel non nul k, puis celle de $\exp(A)$.
4. On considère trois fonctions u, v et w de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant le système d'équations différentielles

$$(S)\quad \begin{cases} u'(t) = -2u(t) + 5v(t) + 2w(t) \\ v'(t) = -u(t) + 4v(t) + 2w(t) \\ w'(t) = 2u(t) - 10v(t) - 5w(t) \end{cases}$$

   (a) Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(t) = (u(t), v(t), w(t)).$$

   On rappelle que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = (u'(t), v'(t), w'(t))$.
   Montrer que le système (S) équivaut à l'équation différentielle

$$(E)\quad \varphi'(t) = f(\varphi(t)).$$

(b) On écrit $\varphi(t) = x(t)u_1 + y(t)u_2 + z(t)u_3$.
Montrer que l'équation différentielle (E) équivaut au système

$$(S') \begin{cases} x'(t) = -x(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \\ z'(t) = -z(t) \end{cases}$$

(c) On suppose que $u(0) = v(0) = 0$ et que $w(0) = 1$; calculer alors $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$.

(d) Résoudre le système (S') avec les conditions initiales $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$ trouvées à la question précédente.

(e) En déduire la solution de (S) vérifiant les conditions initiales $u(0) = v(0) = 0$ et $w(0) = 1$, puis exprimer, pour tout réel t, le vecteur colonne transposé du vecteur $\big(u(t), v(t), w(t)\big)$ à l'aide de la matrice $\exp(tA)$.

FIN DE L'ÉPREUVE